



درس طراحی شبکه توزیع آب شهری

جلسه چهارم و پنجم:

تحلیل هیدرولیکی سامانه‌های آبرسانی

دانشگاه شهید بهشتی

مدرس: دکتر محمد شاه‌سوندی

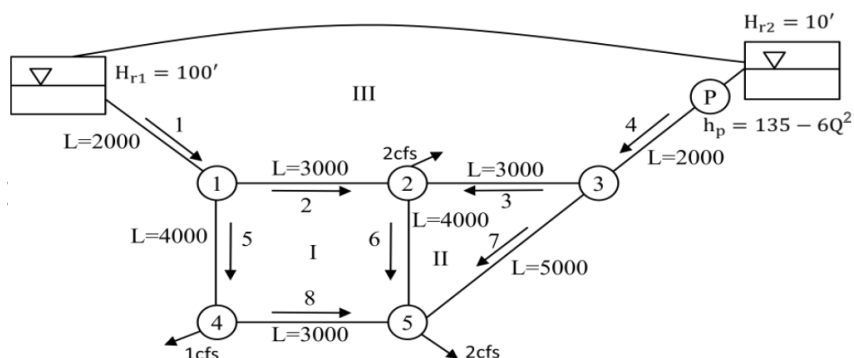
تحلیل هیدرولیکی سامانه‌های آبرسانی

- نکته ۱: در صورتیکه شبکه مورد بررسی دارای m ($m > 1$) گره با هد ثابت باشد، آنگاه به تعداد $m-1$ معادله با عنوان معادلات حلقه‌های مجازی به معادلات حلقه افزوده می‌شود. این معادلات برای مسیرهایی که در دو انتهای آنها، دو گره با هد ثابت قرار دارند، تشکیل می‌شوند.
- نکته ۲: برای نوشتن معادلات حلقه باید یک جهت فرضی مثبت (مثلا جهت عقربه‌های ساعت) در نظر گرفته شود.

معادلات حاکم بر شبکه

در تحلیل شبکه‌های توزیع آب، با استفاده از معادلات پایه، اغلب ۵ دسته متفاوت معادلات (یا پنج دسته متغیر مجهول مختلف) مورد استفاده قرار می‌گیرند:

- معادلات جریان (معادلات Q)
- معادلات گره‌ای (معادلات H)
- معادلات حلقه (معادلات ΔQ)
- معادلات ΔH
- معادلات $H-Q$



تحلیل هیدرولیکی سامانه‌های آبرسانی

معادلات جریان (Q)

■ معادلات جریان معادلاتی هستند که بر پایه مقدار مجهول سرعت یا دبی لوله نوشته می‌شوند. بر اساس معادلات پیوستگی و انرژی، دو مجموعه معادلات خطی و غیرخطی بر حسب Q بدست می‌آیند.

■ در هر شبکه توزیع آب: $NP = (NJ - 1) + NL$ (که NP : تعداد لوله‌ها، NJ : تعداد گره‌ها، NL : تعداد حلقه‌هاست)

■ برای حل معادلات Q، می‌توان $NJ - 1$ معادله خطی پیوستگی را در گره‌های ز بصورت زیر نوشت:

$$\sum_{ij \in IJ_j} Q_{ij} + Q_j = 0 \quad \forall J = 1, 2, \dots, NJ$$

Q_j : دبی برداشتی از گره زام

■ و معادلات بقای انرژی در هر حلقه مستقل L: $\sum_{ij \in IJ_L} f_{ij}(Q_{ij}) = 0 \quad \forall L = 1, 2, \dots, NL$

با NL معادله حلقه و $NJ - 1$ معادله پیوستگی در گره‌ها، می‌توان NP معادله مستقل نوشت..

تحلیل هیدرولیکی سامانه‌های آبرسانی

معادلات گره‌ای (H)

- مجموعه‌ای از معادلات غیرخطی بر اساس مقادیر نامعلوم هد در گره‌ها بر مبنای معادله پیوستگی دبی در گره‌ها و در نظرگیری دبی در اجزای شبکه بصورت تابعی از هد بشکل زیر بدست می‌آیند:

$$\sum_{ij \in IJ_j} f_{ij}(H_i - H_j) + Q_j = 0 \quad \forall J = 1, 2, \dots, NJ$$

NFH: تعداد گره‌های با هد معلوم

- حل NJ - NFH معادله غیرخطی مستقل منجر به تعیین هد گره‌ها و جریان در لوله‌ها می‌شود.
- در معادلات H، NFH حداقل برابر یک است.

تحلیل هیدرولیکی سامانه‌های آبرسانی

معادلات حلقه (ΔQ)

- در این نگرش، متغیرهای سیستم بر اساس مجموعه‌ای از معادلات بقای انرژی در داخل کلیه حلقه‌ها بیان می‌شوند.
- در این روش، ابتدا مقداری برای دبی جریان لوله Q_{ij} بنحوی که پیوستگی را در هر گره ارضا کند فرض می‌شود. این مقدار لزوماً معادله بقای انرژی را در حلقه ارضا نمی‌کند. NL معادله غیرخطی برای NL حلقه نوشته می‌شود. در این معادلات از تصحیح دبی جریان استفاده می‌شود تا اختلاف افت هد در هر حلقه به صفر برسد:

$$\sum_{ij \in IJ_L} f_{ij}(Q_{ij}^0 + \Delta Q_{ij}) = 0 \quad \forall L = 1, 2, \dots, NL$$

- در معادلات Q و ΔQ برای شبکه‌های بیش از یک مخزن، از اتصال دو به دو مخازن یک حلقه مجازی تشکیل می‌شود که می‌توان در آن، معادلات حلقه را نوشت. لوله ارتباطی بین دو مخزن یک لوله مجازی بوده که مقدار افت آن برابر با تفاوت تراز آب دو مخزن است.

تحلیل هیدرولیکی سامانه‌های آبرسانی

معادلات ΔH

مرتب کردن معادلات هیدرولیکی با توجه به تفاوت هد گرهی ΔH

- با فرض هد اولیه برای هر گره (که معمولاً پیوستگی جریان گره‌ها را ارضا نمی‌کنند)، مقادیر ΔH برای همه گره‌ها بطور مستقیم از معادلات هیدرولیکی محاسبه می‌شود:

$$\sum_{ij \in IJ_j} f_{ij} [(H_i^0 + \Delta H_i) - (H_j^0 + \Delta H_j)] + Q_i = 0 \quad \forall J = 1, 2, \dots, NJ$$

H_j^0, H_i^0 : حدس اولیه

$\Delta H_i, \Delta H_j$: مقدار تصحیح شده

معادلات H-Q

معادلات غیرخطی هد-دبی با استفاده از بسط سری تیلور و صرف نظر کردن از ترم دوم به بعد خطی می‌شوند. معادلات غیرخطی افت لوله x در t امین تکرار:

$$(H_{t,oi} + \Delta H_{t,i}) - (H_{t,oj} + \Delta H_{t,j}) = R_{ox} Q_{t,ox}^n + n R_{ox} |Q_{t,ox}|^{n-1} \Delta Q_{t,x} \quad x = 1, 2, \dots, NP$$

R_{ox} : ثابت معلوم مقاومت لوله

$H_{t,oi}$ و $H_{t,oj}$: هد فرض شده در t امین تکرار برای گره‌های i, j

Q_{ox} : دبی معلوم یا فرض شده برای لوله x در t امین تکرار

$\Delta Q_{t,x}$ ، $\Delta H_{t,i}$ ، $\Delta H_{t,j}$: تصحیحات نامعلوم در تکرار t ام

■ این دسته معادلات مبنای حل به روش گرادیان است.

■ استفاده از معادلات H و یا $H-Q$ معمولاً محاسبات ساده‌تری دارد.

روشهای حل معادلات هیدرولیکی

روش هاردی کراس

متداول‌ترین روش تحلیل شبکه است. از این روش می‌توان برای حل معادلات H , ΔQ , Q استفاده کرد ولی اغلب برای حل معادلات ΔQ استفاده می‌شود که به آن روش متعادل کردن هدها گفته می‌شود. این روش اغلب برای حل دستی شبکه‌های ساده بکار می‌رود.

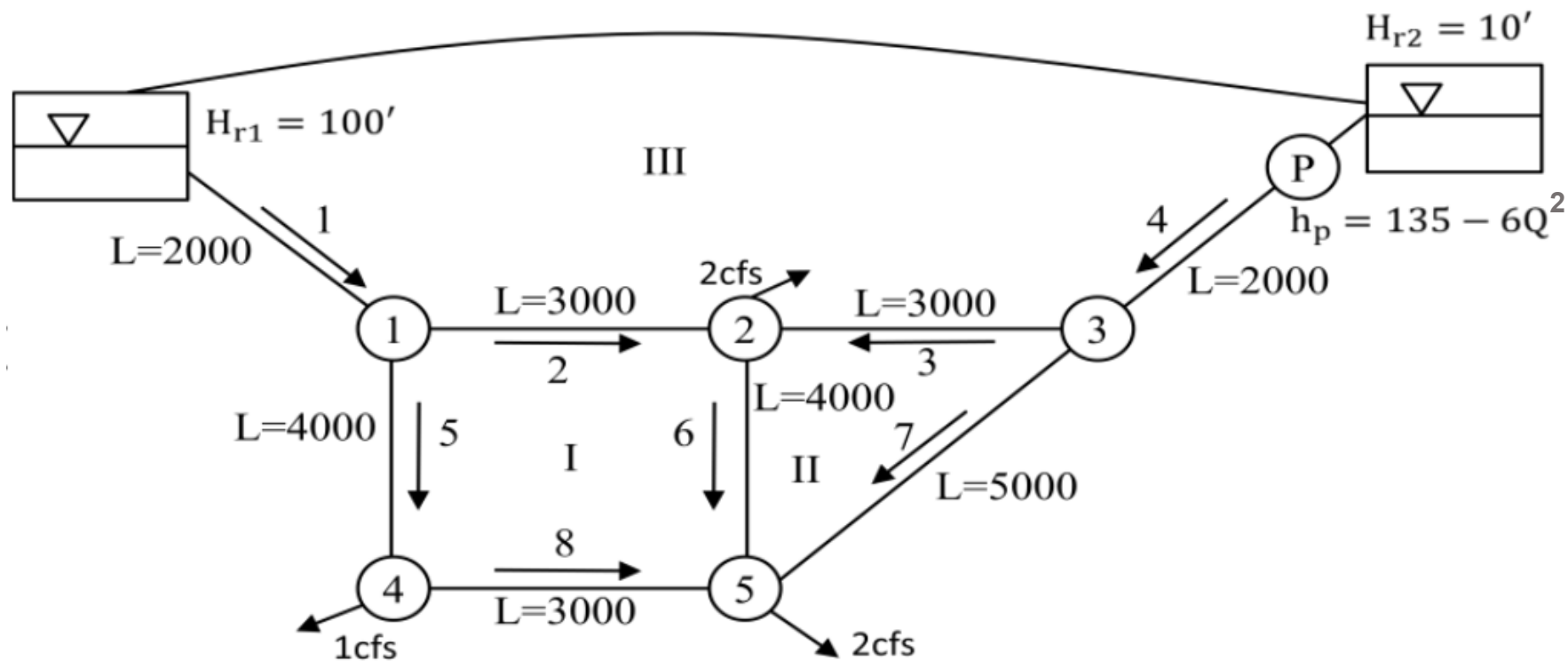
معادله نهایی روش ΔQ برای هر یک از حلقه‌های شبکه:

$$\Delta Q_L^{m+1} = - \frac{\sum_{ij \in IJ_L} f_{ij}(Q_{ij}^0 + \Delta Q_L^m)}{\sum_{ij \in IJ_L} \left| \frac{\partial f_{ij}(Q_{ij}^0 + \Delta Q_L^m)}{\partial (Q_{ij}^0 + \Delta Q_L^m)} \right|}$$

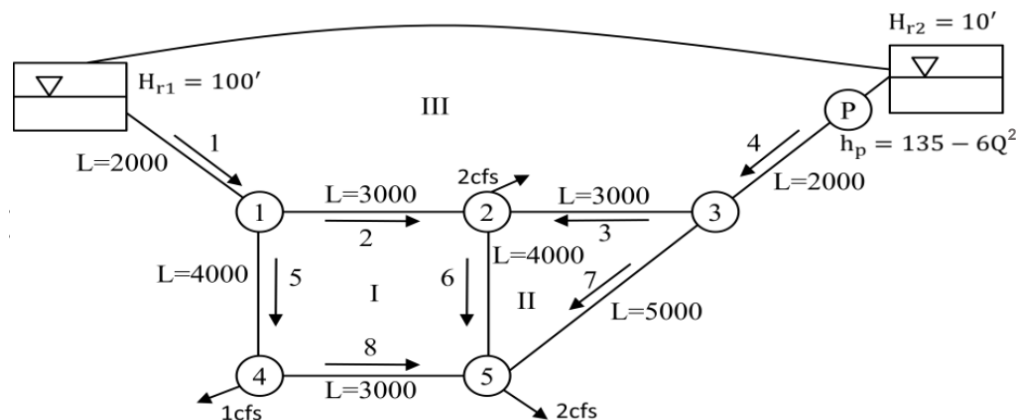
پس از محاسبه مقدار اصلاح دبی در هر حلقه، جریان در لوله‌ها با مقدار اصلاح دبی تعیین شده برای حلقه‌های مربوطه‌شان جمع می‌شود.

روشهای حل معادلات هیدرولیکی

- **مثال:** معادلات حلقه را برای شبکه زیر با توجه به جهت جریان نشان داده شده، تشکیل دهید. میزان جریان در هر لوله و انرژی کل را در گره‌های ۴ و ۵ با استفاده از روش هاردی کراس برای حل معادلات حلقه بدست آورید. قطر لوله‌ها ۱ فوت و ضریب زبری آنها ۰.۰۱۳ است. از رابطه دارسی-وایسباخ برای محاسبه ضریب مقاومت لوله‌ها استفاده شود.



■ حل:



$$\text{گره ۱: } Q_1 - Q_2 - Q_5 = 0$$

$$\text{گره ۲: } Q_2 + Q_3 - Q_6 = 2$$

$$\text{گره ۳: } -Q_3 + Q_4 - Q_7 = 0$$

$$\text{گره ۴: } Q_5 - Q_8 = 1$$

$$\text{گره ۵: } Q_6 + Q_7 + Q_8 = 2$$

$$\text{حلقه ۱: } h_{f2} + h_{f6} - h_{f8} - h_{f5} = R_2 Q_2^2 + R_6 Q_6^2 - R_8 Q_8^2 - R_5 Q_5^2 = 0$$

$$\text{حلقه ۲: } h_{f7} - h_{f6} - h_{f3} = R_7 Q_7^2 - R_6 Q_6^2 - R_3 Q_3^2 = 0$$

$$\text{حلقه مجازی: } h_{f4} - h_P + h_{f3} - h_{f2} - h_{f1} + H_{r1} - H_{r2} = 0$$

$$= R_4 Q_4^2 - (A_P Q_4^2 + B_P Q_4 + C_P) + R_3 Q_3^2 - R_2 Q_2^2 - R_1 Q_1^2 + H_{r1} - H_{r2}$$

روشهای حل معادلات هیدرولیکی

■ **ادامه حل:** مقادیر فرضی دبی اولیه و ثابت R برای لوله‌های شبکه بصورت جدول زیر است:

لوله	۱	۲	۳	۴ و پمپ	۵	۶	۷	۸
R	۱/۶۱۱	۲/۴۱۷	۲/۴۱۷	۱/۶۱۱	۳/۲۲۲	۳/۲۲۲	۴/۰۲۸	۲/۴۱۷
Q (cfs)	۲/۵	۱/۰	۱/۵	۲/۵	۱/۵	۰/۵	۱/۰	۰/۵

همچنین ضرایب معادله مشخصه پمپ معلوم است:

$$C_P = 135 \text{ و } B_P = 0, A_P = -6$$

محاسبه مقدار اصلاح لازم برای حلقه مجازی:

$$R_4 Q_4^2 - (A_P Q_4^2 + C_P) + R_3 Q_3^2 - R_2 Q_2^2 - R_1 Q_1^2 - H_{r2} + H_{r1} = 1.611(2.5)^2 - (-6(2.5)^2 + 135) \\ + 2.417(1.5)^2 - 2.417(1.0)^2 - 1.611(2.5)^2 - 10 + 100 = -4.48$$

$$2R_4 Q_4 + 2A_P Q_4 + 2R_3 Q_3 + 2R_2 Q_2 + 2R_1 Q_1 = \\ 2(1.611(2.5)) + |2(-6)2.5| + 2(2.417(1.5)) + 2|2.417(1.0)| + 2|1.611(2.5)| = 58.20$$

$$\Delta Q_{PL} = -\frac{(-4.48)}{58.20} = 0.077$$

روشهای حل معادلات هیدرولیکی

■ ادامه حل: محاسبه مقدار اصلاح لازم برای حلقه‌های ۱ و ۲

$$R_2 Q_2^2 + R_6 Q_6^2 - R_8 Q_8^2 - R_5 Q_5^2 =$$

$$2.417(1.0)^2 + 3.222(0.5)^2 - 2.417(0.5)^2 - 3.222(1.5)^2 = -4.63$$

$$2R_2 Q_2 + 2R_6 Q_6 + 2R_8 Q_8 + 2R_5 Q_5 =$$

$$2(2.417(1.0)) + 2(3.222(0.5)) + 2(2.417(0.5)) + 2(3.222(1.5)) = 20.14$$

$$\Delta Q_1 = -\frac{(-4.63)}{20.14} = 0.230$$

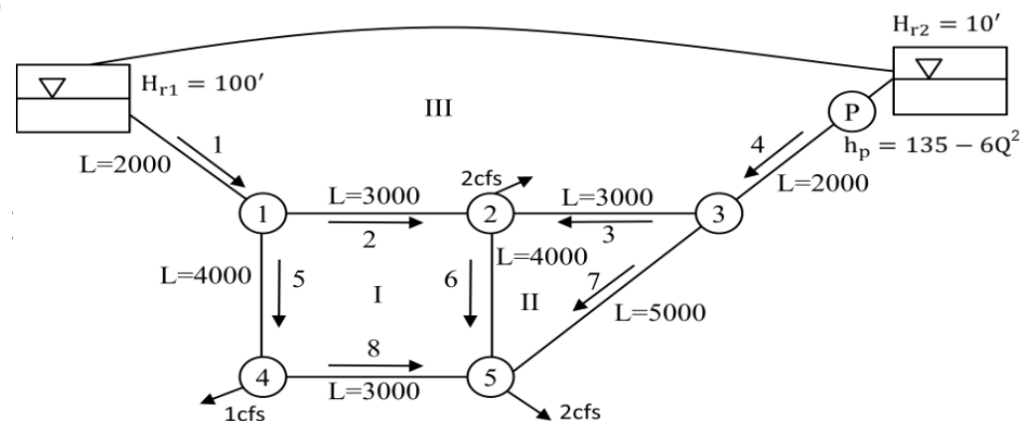
$$R_7 Q_7^2 - R_6 Q_6^2 - R_3 Q_3^2 =$$

$$4.028(1.0)^2 - 3.222(0.5)^2 - 2.417(1.5)^2 = -2.22$$

$$2R_7 Q_7 + 2R_6 Q_6 + 2R_3 Q_3 =$$

$$2(4.028(1.0)) + 2(3.222(0.5)) + 2(2.417(1.5)) = 18.53$$

$$\Delta Q_2 = -\frac{(-2.22)}{18.53} = 0.120$$



■ مقادیر اصلاح دبی و دبی تکرار اول برای لوله‌های شبکه بصورت جدول زیر است:

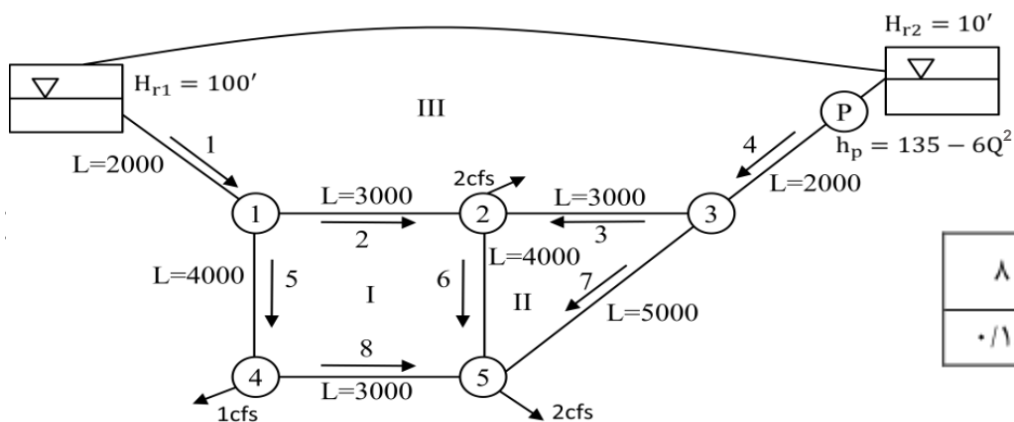
لوله	۱	۲	۳	۴ و پمپ	۵	۶	۷	۸
ΔQ	-۰/۰۷۷	۰/۲۳۰+	۰/۰۷۷-	۰/۰۷۷	-۰/۲۳۰	۰/۲۳۰	۰/۱۲۰	-۰/۲۳۰
Q (cfs)	۲/۴۲	۱/۱۵	۱/۴۶	۲/۵۸	۱/۲۷	۰/۶۱	۱/۱۲	۰/۲۷

روشهای حل معادلات هیدرولیکی

■ **ادامه حل:** مقادیر اصلاح دبی در تکرار دوم و سوم بصورت جدول زیر است:

شماره تکرار	لوله	۱	۲	۳	۴ و پمپ	۵	۶	۷	۸
۲	ΔQ	-۰/۰۳۰	۰/۰۵۲ -۰/۰۳۰	۰/۰۳۰ -۰/۰۶۵	۰/۰۳۰	-۰/۰۵۲	۰/۰۵۲ -۰/۰۶۵	۰/۰۶۵	-۰/۰۵۲
	Q (cfs)	۲/۳۹	۱/۱۷	۱/۴۳	۲/۶۱	۱/۲۲	۰/۶۰	۱/۱۸	۰/۲۲
۳	ΔQ	-۰/۰۱۲	۰/۰۲۴ -۰/۰۱۲	۰/۰۱۲ -۰/۰۲۴	۰/۰۱۲	-۰/۰۲۴	۰/۰۲۴ -۰/۰۲۴	۰/۰۲۴	-۰/۰۲۴
	Q (cfs)	۲/۳۸	۱/۱۸	۱/۴۲	۲/۶۲	۱/۲۰	۰/۶۰	۱/۲۰	۰/۲۰

■ بعد از دو تکرار دیگر مقدار تغییرات کوچک شده و دبی نهایی لوله‌ها بشرح جدول زیر بدست می‌آید. همانطور که مشاهده می‌شود معادله پیوستگی در هر گره ارضا شده است.



مقادیر نهایی دبی لوله‌ها

لوله	۱	۲	۳	۴ و پمپ	۵	۶	۷	۸
Q (cfs)	۲/۳۷	۱/۱۹	۱/۴۱	۲/۶۳	۱/۱۸	۰/۶۰	۱/۲۱	۰/۱۸

روشهای حل معادلات هیدرولیکی

روش نیوتن-رافسن

- روش نیوتن-رافسن را می‌توان برای حل همه ۵ دسته دستگاه معادلات هیدرولیکی شبکه بکار گرفت، ولی در عمل برای حل معادلات H و ΔQ بیشتر استفاده می‌شود.
- این روش، معادلات پیوستگی را در تمام گره‌ها بطور همزمان حل می‌کند.
- با توجه به قانون پیوستگی در هر گره، مقدار جریان باقیمانده در هر گره:

$$\underline{F}(\underline{x})=0$$

$\underline{F}$: بردار مقادیر باقیمانده گره‌ها

$\underline{x}$: بردار مقادیر مجهول در هر گره

$$\underline{H}^{m+1} = \underline{H}^m - \left(\underline{J}^m\right)^{-1} \underline{F}(\underline{H}^m)$$

$\left(\underline{J}^m\right)^{-1}$: معکوس ماتریس ژاکوبین $\underline{J}^m$ است.

روشهای حل معادلات هیدرولیکی

روش نیوتن-رافسن (ادامه)

■ برای یک شبکه با NVH ($NJ-NFH=$) گره با مقدار متغیر هد مجهول، ماتریس ژاکوبین با بعد $NVH \times NVH$ بصورت

زیر نوشته می‌شود:

$$\underline{J}^m = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial H_1^m} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial H_{NVH}^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_{NVH}}{\partial H_1^m} & \dots & \frac{\partial F_{NVH}}{\partial H_{NVH}^m} \end{bmatrix}$$

■ در صورتیکی بین نقاط i و j ارتباطی وجود نداشته باشد، $\frac{\partial F_j}{\partial H_i}$ و $\frac{\partial F_i}{\partial H_j}$

برابر با صفر هستند.

$$\frac{\partial F_i}{\partial H_j^m} = \frac{-\left(\frac{1}{n}\right)}{R_{ij}} \left(\frac{|H_i^m - H_j^m|}{R_{ij}}\right)^{\frac{1}{n}-1} = \frac{\partial F_j}{\partial H_i^m} ; \quad i > j$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial H_i^m} = - \sum_{j \in J_i} \frac{\partial F_i}{\partial H_j^m}$$

■ J_i نشان‌دهنده مجموعه تمام گره‌های j مجاور i که

بطور مستقیم به آن متصل شده‌اند، است.

روشهای حل معادلات هیدرولیکی

روش نیوتن-رافسن (ادامه)

$$\underline{H}^{m+1} = \underline{H}^m - \left(\underline{J}^m\right)^{-1} \underline{F}(\underline{H}^m)$$

■ از آنجا که محاسبه معکوس ماتریس ژاکوبین مشکل است،

بردار مقادیر اصلاحی هد گره‌ها با استفاده از معادله زیر بدست می‌آید:

$$\underline{J}^m \underline{\Delta H}^m = \underline{F}(\underline{H}^m)$$

$$\underline{H}^{m+1} = \underline{H}^m - \underline{\Delta H}^m$$

■ گامهای حل همزمان NJ-NFH معادله غیرخطی

۱- مقدار اولیه‌ای برای هد در گره j ، H_j^m حدس زده می‌شود.

۲- بردار جریان باقیمانده $\underline{F}(\underline{H}^m)$ و ماتریس ژاکوبین $\underline{J}^m$ محاسبه می‌شود.

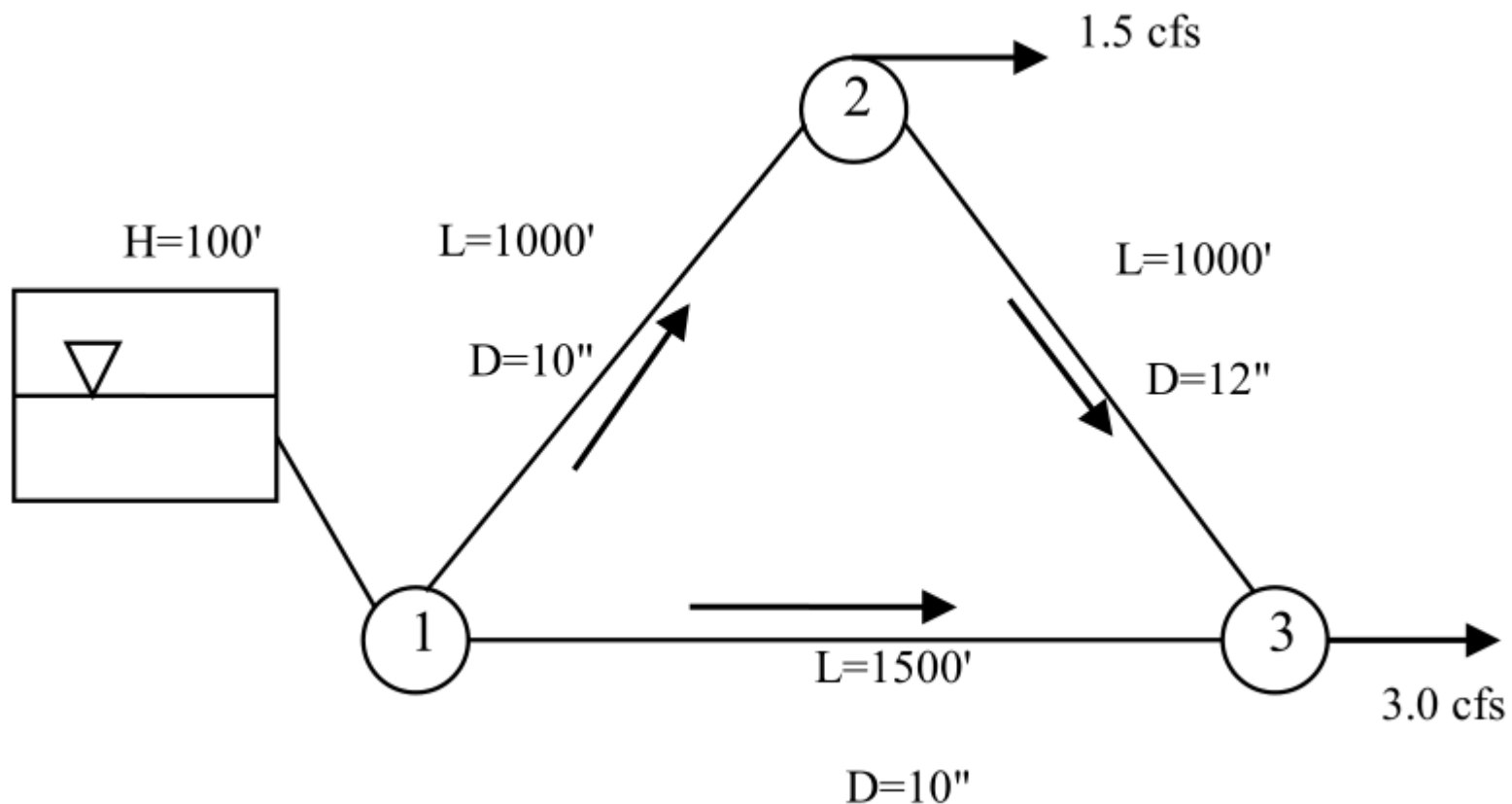
۳- بردار مقادیر اصلاحی هد گره‌ها $\underline{\Delta H}^m$ محاسبه می‌شود تا مقادیر اصلاح شده هد گره‌ها $\underline{H}^{m+1}$ بدست آیند.

۴- گام‌های ۲ و ۳ تکرار می‌شوند تا مقادیر $\underline{\Delta H}^m$ یا F_j^m با دقت مورد نظر محاسبه شوند.

■ با استفاده از مقادیر نهایی هد گره‌ها، دبی جریان در لوله‌ها بدست می‌آیند.

روشهای حل معادلات هیدرولیکی

مثال: دبی لوله‌ها را در شبکه زیر با استفاده از روش نیوتن-رافسن بدست آورید. ضریب هیزن ویلیامز برای تمامی لوله‌ها ۱۲۰ است.



روشهای حل معادلات هیدرولیکی

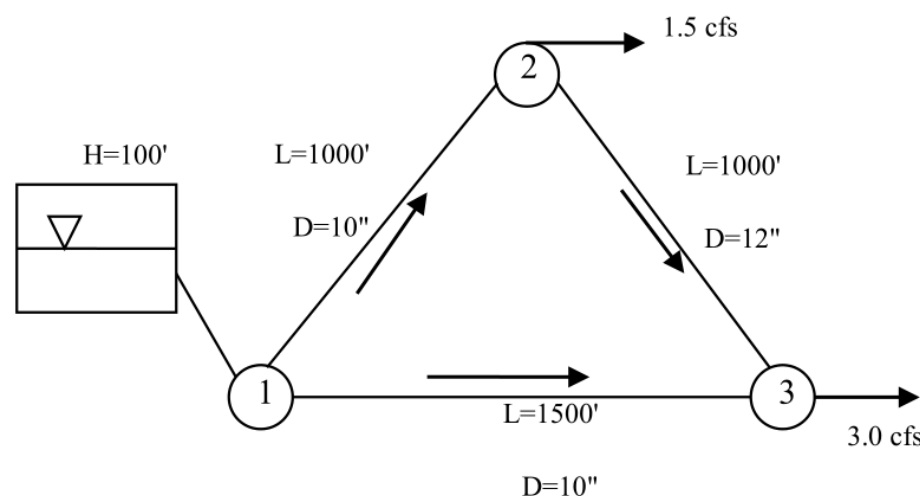
حل: مقادیر ضریب مقاومت سه لوله به ترتیب برابر خواهد بود با: $R_{12}=1.622$ ، $R_{13}=2.432$ و $R_{23}=0.667$ ؛ فشار در گره ۱ برابر 100 ft و در دو گره دیگر مجهول است. با تشکیل معادلات H:

$$F_2 = -\left(\frac{H_1 - H_2}{R_{12}}\right)^{1/n} + \left(\frac{H_2 - H_3}{R_{23}}\right)^{1/n} + 1.5 = 0$$

$$F_3 = -\left(\frac{H_2 - H_3}{R_{23}}\right)^{1/n} - \left(\frac{H_1 - H_3}{R_{13}}\right)^{1/n} + 3.0 = 0$$

$$F_2 = -\left(\frac{100 - H_2}{1.622}\right)^{0.54} + \left(\frac{H_2 - H_3}{0.667}\right)^{0.54} + 1.5 = 0$$

$$F_3 = -\left(\frac{H_2 - H_3}{0.667}\right)^{0.54} - \left(\frac{H_1 - H_3}{2.432}\right)^{0.54} + 3.0 = 0$$



با جایگذاری مقادیر:

و عناصر ماتریس ژاکوبین یعنی،

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_2}{\partial H_2} & \frac{\partial F_2}{\partial H_3} \\ \frac{\partial F_3}{\partial H_2} & \frac{\partial F_3}{\partial H_3} \end{vmatrix}$$
 به صورت زیر محاسبه می شوند:

ادامه حل:

$$\frac{\partial F_2}{\partial H_2} = \frac{0.54}{R_{12}} \left(\frac{H_1 - H_2}{R_{12}} \right)^{\frac{1}{n}-1} + \frac{0.54}{R_{23}} \left(\frac{H_2 - H_3}{R_{23}} \right)^{\frac{1}{n}-1} =$$

$$0.333 \left(\frac{100 - H_2}{1.622} \right)^{-0.46} + 0.809 \left(\frac{H_2 - H_3}{0.667} \right)^{-0.46}$$

معادلات گره‌ها:

$$\frac{\partial F_2}{\partial H_3} = -\frac{0.54}{R_{23}} \left(\frac{H_2 - H_3}{R_{23}} \right)^{\frac{1}{n}-1} = -0.809 \left(\frac{H_2 - H_3}{0.667} \right)^{-0.46}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial H_2} = -\frac{0.54}{R_{23}} \left(\frac{H_2 - H_3}{R_{23}} \right)^{\frac{1}{n}-1} = -0.809 \left(\frac{H_2 - H_3}{0.667} \right)^{-0.46}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial H_3} = \frac{0.54}{R_{23}} \left(\frac{H_2 - H_3}{R_{23}} \right)^{\frac{1}{n}-1} + \frac{0.54}{R_{13}} \left(\frac{H_1 - H_3}{R_{13}} \right)^{\frac{1}{n}-1} =$$

$$0.809 \left(\frac{H_2 - H_3}{0.667} \right)^{-0.46} + 0.222 \left(\frac{100 - H_3}{2.432} \right)^{-0.46}$$

$$\begin{bmatrix} 0.432 & -0.233 \\ -0.233 & 0.329 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta H_2 \\ \Delta H_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.98 \\ -3.98 \end{bmatrix}$$

$$F_2 = -\left(\frac{100 - H_2}{1.622} \right)^{0.54} + \left(\frac{H_2 - H_3}{0.667} \right)^{0.54} + 1.5 = 0$$

$$F_3 = -\left(\frac{H_2 - H_3}{0.667} \right)^{0.54} - \left(\frac{H_1 - H_3}{2.432} \right)^{0.54} + 3.0 = 0$$

اگر حدس اولیه $\vec{H} = \begin{bmatrix} H_2 \\ H_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 95 \\ 85 \end{bmatrix}$ در نظر گرفته شود،

مقادیر اصلاحی فشار از طریق حل دستگاه زیر به دست

می‌آید.

ادامه حل: از حل دستگاه فوق:

$$\begin{cases} \Delta H_2 = 4.34 \text{ ft} \\ \Delta H_3 = -9.04 \text{ ft} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_2 = 90.66 \text{ ft} \\ H_3 = 94.04 \text{ ft} \end{cases}$$

بعد از ۶ تکرار:

$$\begin{cases} H_2 = 91.45 \text{ ft} \\ H_3 = 90.84 \text{ ft} \end{cases}$$

و دبی لوله‌ها:

$$Q_{12} = 2.454 \text{ cfs}$$

$$Q_{23} = 0.954 \text{ cfs}$$

$$Q_{13} = 2.046 \text{ cfs}$$

نکته: ماتریس ضرایب ژاکوبین نسبت به قطر متقارن است؛ بنابراین برای کاهش تعداد محاسبات می‌توان تنها مثلث بالا یا پایین قطر را محاسبه کرد. از طرفی با توجه به اینکه تعداد زیادی از درایه‌های این ماتریس صفر است، توصیه می‌شود نحوه شماره‌گذاری گره‌ها بنحوی انجام شود که درایه‌های غیرصفر در محدوده نزدیک به هم قرار گیرند و سپس با استفاده از تکنیک‌های عددی همچون Sparse Matrix با سرعت بیشتر و اشغال کمتر حافظه معادلات را حل کرد.

روشهای حل معادلات هیدرولیکی

روش تئوری خطی

■ از این روش برای حل معادلات Q و H می‌توان استفاده کرد.

■ مراحل حل بصورت زیر است:

۱- مقدار اولیه‌ای برای دبی لوله‌ها، Q_{ij}^m حدس زده می‌شود.

۲- معادلات پیوستگی جریان در گره‌ها خطی می‌شوند (اگر بر مبنای معادلات H نوشته شوند).

۳- معادلات پیوستگی خطی شده جریان گره‌ها حل شده و مقادیر جدیدی برای هد مجهول گره‌ها H_j^{m+1} بدست می‌آید.

۴- مقادیر جدید جریان لوله‌ها (Q_{ij}^{m+1}) محاسبه شده و مجدداً مراحل از گام ۲ تکرار می‌شوند تا دقت مورد نیاز برای تعیین مجهولات تامین شود.

روشهای حل معادلات هیدرولیکی

روش تئوری خطی

■ رابطه غیر خطی هد-جریان در لوله‌ها بصورت زیر خطی می‌شود:

$$Q_{ij}^{m+1} |Q_{ij}^m|^{(n-1)} = \frac{H_i^{m+1} - H_j^{m+1}}{R_{ij}}$$

Q_{ij}^m ، H_i^m و H_j^m : بترتیب مقادیر معلوم دبی در لوله و هد در دو گره ابتدا و انتهای لوله در گام محاسباتی m

$$Q_{ij}^{m+1} = \frac{(H_i^{m+1} - H_j^{m+1})}{R_{ij} |Q_{ij}^m|^{(n-1)}}$$

■ با قرار دادن این معادله در معادلات پیوستگی، مجموعه‌ای از معادلات خطی ایجاد می‌شود که حل آن‌ها منجر به

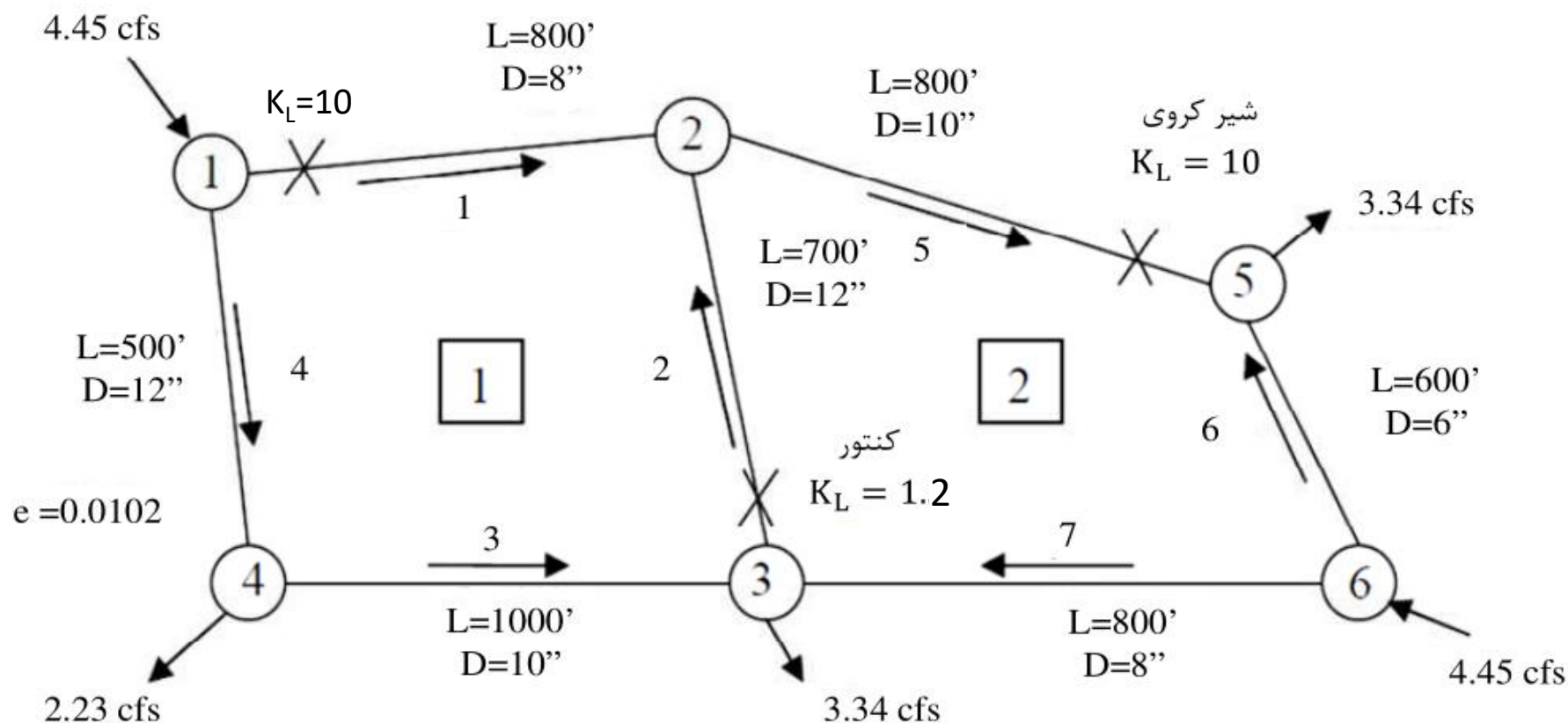
تعیین مقادیر H_j^{m+1} می‌شود. با استفاده از مقادیر اصلاح شده هد، مقادیر جدید دبی لوله‌ها، Q_{ij}^{m+1} بدست می‌آیند.

روش تئوری خطی

- مقادیر فرض شده جریان در گام اول، لزوماً معادلات پیوستگی را ارضا نمی‌کنند و مقدارشان نیز در همگرایی حل تاثیری ندارد. مقادیر بدست آمده دبی در هر تکرار پیوستگی را ارضا کرده و روند تکرار به سوی رسیدن به پاسخی میل می‌کند که روابط غیرخطی هد-جریان در هر جزء را ارضا کند.

روشهای حل معادلات هیدرولیکی

مثال: دبی لوله‌های نشان داده شده در شکل را با روش تئوری خطی بدست آورید. در این شبکه روی لوله‌های ۱ و ۵ شیر فلکه کروی و روی لوله ۲ یک کنترلر روزنه‌ای نصب شده است. مقادیر R و n برای استفاده در رابطه دارسی-وایسباخ در لوله‌های مختلف در جدول داده شده است.



جدول مقادیر اولیه R و n لوله‌های مثال

شماره لوله	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
n	۱/۹۶	۱/۸۵	۱/۹۰	۱/۹۵	۱/۹۵	۱/۹۷	۱/۹۸
R	۴/۷۱	۰/۴۰۲	۱/۳۷	۰/۲۶۴	۱/۱۴	۱۱/۳۰	۳/۳۵

حل: با استفاده از ضرایب دارسی-وایسباخ، طول معادل لوله‌ها در افت‌های موضعی بدست می‌آید:

$$\Delta L_1 = \frac{K_L D}{f} = \frac{10(0.667)}{0.0218} = 306 \text{ ft}$$

$$\Delta L_2 = \frac{1.2(1)}{0.0238} = 51 \text{ ft}$$

$$\Delta L_5 = \frac{10(0.833)}{0.02085} = 400 \text{ ft}$$

روشهای حل معادلات هیدرولیکی

ادامه حل: شبکه دارای ۶ گره است، لذا می‌توان ۵ معادله مستقل پیوستگی نوشت:

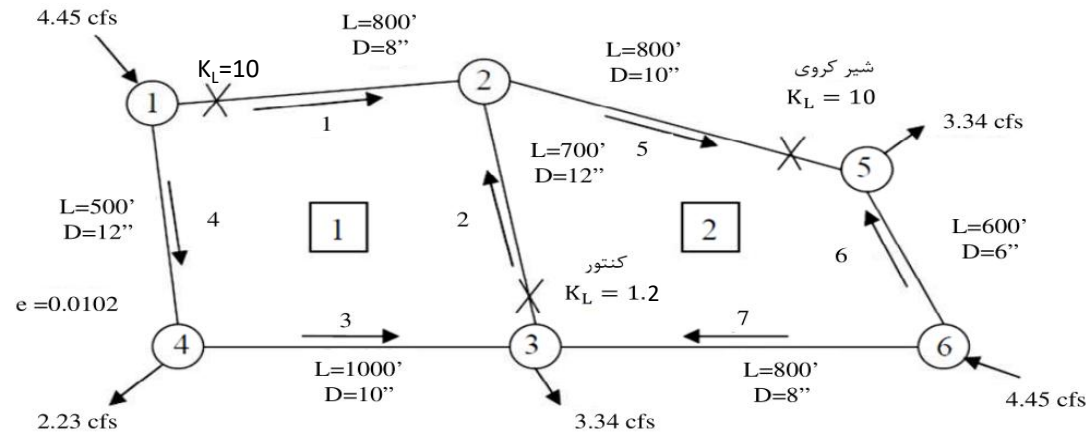
$$Q_1 + Q_4 = 4.45$$

$$-Q_1 - Q_2 + Q_5 = 0$$

$$Q_2 - Q_3 - Q_7 = -3.34$$

$$Q_3 - Q_4 = -2.23$$

$$-Q_5 - Q_6 = -3.34$$



معادلات افت هد حلقه‌ها از طریق اعمال ضرایبی برابر با $R \times Q_{i0}^{n-1}$ برای هر یک از Q_i ها به معادلات خطی تبدیل می‌شوند. در تکرار اول همه Q_{i0} ها برابر ۱ در نظر گرفته می‌شوند. لذا معادلات حلقه در تکرار اول:

$$4.71Q_1 - 0.402Q_2 - 1.37Q_3 - 0.264Q_4 = 0$$

$$1.14Q_5 - 11.30Q_6 + 3.35Q_7 + 0.402Q_2 = 0$$

شماره لوله	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
n	۱/۹۶	۱/۸۵	۱/۹۰	۱/۹۵	۱/۹۵	۱/۹۷	۱/۹۸
R	۴/۷۱	۰/۴۰۲	۱/۳۷	۰/۲۶۴	۱/۱۴	۱۱/۳۰	۳/۳۵

ادامه حل: با حل معادلات فوق (مثلا به روش حذف گوسی یا گوس-جردن):

$$\begin{aligned} Q_1 &= 0.752 \text{ cfs}, & Q_2 &= 1.37 \text{ cfs}, & Q_3 &= 1.48 \text{ cfs}, & Q_4 &= 3.70 \text{ cfs}, \\ Q_5 &= 2.12 \text{ cfs}, & Q_6 &= 1.22 \text{ cfs}, & Q_7 &= 3.23 \text{ cfs} \end{aligned}$$

بر اساس دبی‌های فوق، مقادیر جدید R و n لوله‌ها بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} R_1 &= 4.71, & R_2 &= 0.406, & R_3 &= 1.36, & R_4 &= 0.262, \\ R_5 &= 1.62, & R_6 &= 11.29, & R_7 &= 3.35 \\ n_1 &= 1.93, & n_2 &= 1.92, & n_3 &= 1.94, & n_4 &= 1.96 \\ n_5 &= 1.95, & n_6 &= 1.97, & n_7 &= 1.98 \end{aligned}$$

با استفاده از این مقادیر، دو معادله انرژی اصلاح شده‌اند. مقادیر R و n در رابطه توانی اصلاح شده و از حاصلضرب مقدار

تصحیح شده R در $Q_{i(1)}^{ni-1}$ مقدار Q_i^{ni-1} حاصل می‌شود که به این ترتیب ضرایب جدید معادلات حلقه بدست می‌آیند.

ادامه حل: معادلات تصحیح شده در دومین تکرار:

$$3.62Q_1 - 0.541Q_2 - 1.96Q_3 - 0.92Q_4 = 0$$

$$3.31Q_5 - 13.70Q_6 + 10.55Q_7 + 0.406Q_2 = 0$$

پس از حل دست معادلات جدید، مقادیر دبی‌ها بشرح زیر تعیین می‌شوند:

$$Q_1 = 1.02 \text{ cfs}, \quad Q_2 = 0.653 \text{ cfs}, \quad Q_3 = 1.20 \text{ cfs}, \quad Q_4 = 3.43 \text{ cfs},$$

$$Q_5 = 1.68 \text{ cfs}, \quad Q_6 = 1.66 \text{ cfs}, \quad Q_7 = 2.79 \text{ cfs}$$

اگر مقادیر این دبی‌ها و مقادیر قبلی برای تعیین ضرایب معادلات حلقه بکار روند، جواب نهایی بدست خواهد آمد، زیرا تغییرات جوابها در تکرارهای بعدی ناچیز است. بنابراین جواب نهایی بر عبارت خواهند بود از:

$$Q_1 = 1.032 \text{ cfs}, \quad Q_2 = 0.656 \text{ cfs}, \quad Q_3 = 1.195 \text{ cfs}, \quad Q_4 = 3.422 \text{ cfs},$$

$$Q_5 = 1.688 \text{ cfs}, \quad Q_6 = 1.653 \text{ cfs}, \quad Q_7 = 2.802 \text{ cfs}$$